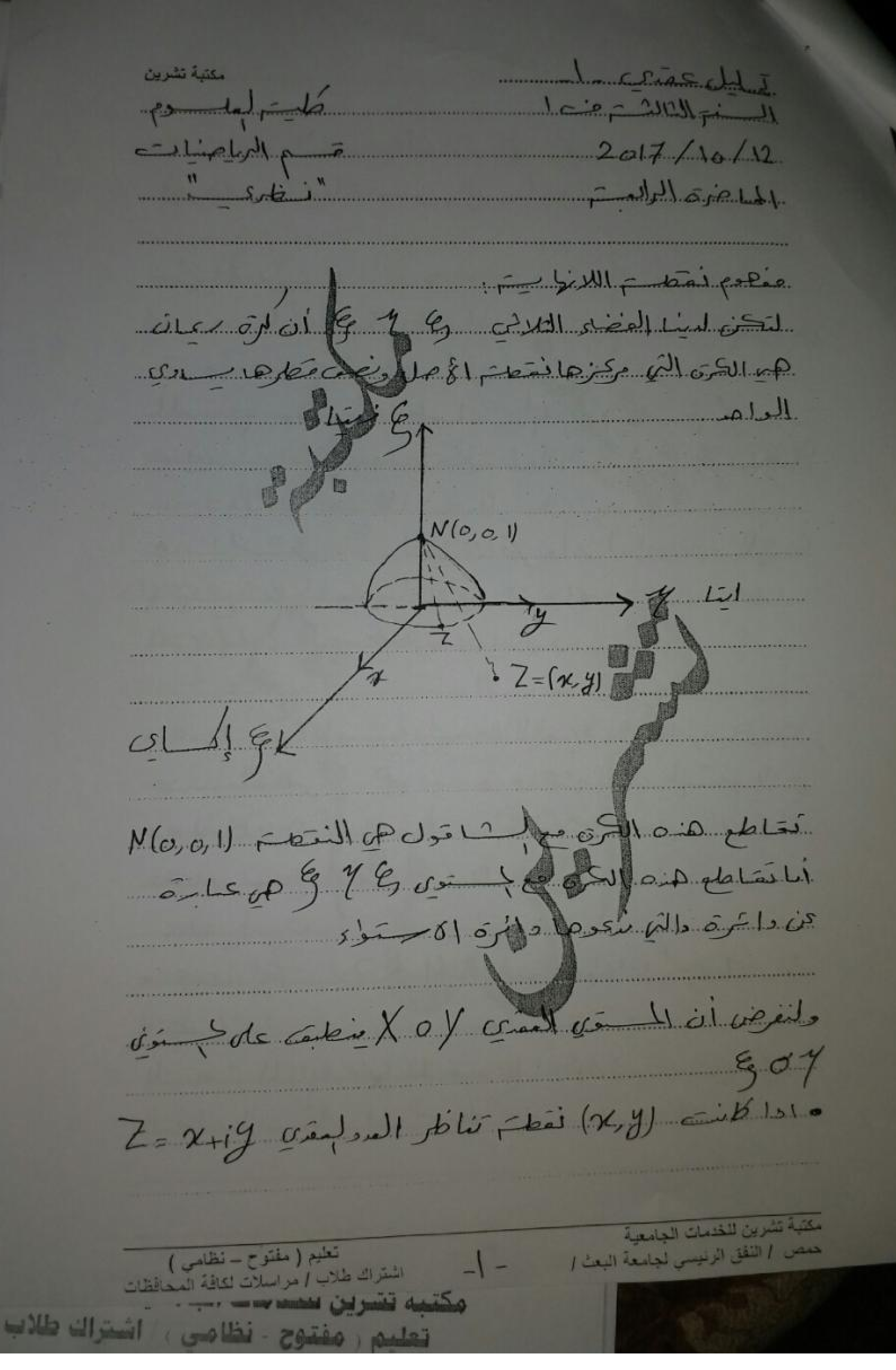


تحليل عقدي ١ ....

السنة الثالثة ف ١ .... كلية العلوم

2017/10/12 .... قسم الرياضيات

المحاضرة الرابعة .... "نظري"

مفهوم نقطة اللانهاية:

لتكن لدينا الفضاء الثلاثي ξ η ζ أن كرة ريمان هي الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي الواحد

تقاطع هذه الكرة مع الشاقول هي النقطة N(0,0,1)

أما تقاطع هذه الكرة مع المستوي ξ η هي عبارة عن دائرة والتي ندعوها دائرة الاستواء

ولنفرض أن المستوي العقدي X O Y منطبق على المستوي ξ O η

• إذا كانت (x,y) نقطة تناظر العدد العقدي $Z = x+iy$

عندئذ هذه النقطة أما أنه تكون خارج دائرة الاستواء أو داخل دائرة الاستواء أو على دائرة الاستواء

• في الحالة الأولى عندما تكون خارج كرة ريمان: نصل بين لإيجاد النقطة المناظرة لسطح الكرة ريمان z والقطب الشمالي $N(0,0,1)$ عندئذٍ هذا المستقيم سوف يقطع الجزء العلوي من سطح كرة ريمان في نقطة واحدة فقط ولتكن $P(x_1, x_2, x_3)$

في هذا الشكل يكون لدينا تناظر واحد لواحد بين النقاط التي تقع في المستوي خارج دائرة الاستواء ونقاط الجزء العلوي من سطح كرة ريمان

• عندما z واقعة في المستوي العقدي وعلى دائرة الاستواء: عندئذٍ النظير لها هو نفسه وذلك لأن المستقيم الذي يصل بين هذه النقطة والقطب الشمالي $N(0,0,1)$ يقطع سطح الكرة في هذه النقطة

• عندما تكون z في المستوي العقدي وداخل كرة الاستواء عندئذٍ:

النقطة المناظرة لها على سطح الكرة ريمان تقع في النصف السفلي من سطح كرة ريمان وذلك لأنه:

المستقيم الذي يصل بين ج و القطب N سوف يقطع سطح الكرة في الجزء السفلي

ملاحظة

عندما تقطع المستقيم سطح الكرة في الجزء السفلي هذا يعني بأن زيتا يجب ان تكون سالبة

• أما المستقيم الذي يشترك مع سطح الكرة ريمان في نقطة واحدة وهي N(0,0,1) مدعوه المماس لهذه الكرة

لذلك هنالك عدد كبير منه من المستقيمات التي تشترك مع سطح الكرة ريمان في النقطة N(0,0,1) اي مستقيم من هذه المستقيمات سيلاقي المستوي العقدي X و Y في اللانهاية

لذلك نقطة اللانهاية في المستوي العقدي يناظرها القطب الشمالي مع كرة ريمان مبناءاً على هذا:

ان مجموعة اي نقاط من المستوي العقدي تقع في خارجية الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ما المستوي العقدي ونصف قطرها كبير لقدر كافي ممكن اعتبار هذا المجموعة هي (جوار لنقطة اللانهاية)

• لإيجاد العلاقات التي تربط بين الأعداد العقدية ومسقطاتها على سطح كرة ريمان:

لكن لدينا المتجهان $\overrightarrow{NZ}$ و $\overrightarrow{NP}$ متوازيان بحيث:

$$\overrightarrow{NZ} = (x-0)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (0-1)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{NZ} = x\vec{i} + y\vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{NP} = \xi\vec{i} + \eta\vec{j} + (\zeta - 1)\vec{k}$$

وبما أن المتجهان متوازيان عندئذ

$$* \quad \frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{-1}{\zeta - 1} = \lambda$$

حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$

نجد من تناسب الأول والثالث:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}$$

ومن تناسب الثاني والثالث:

$$y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

وبالتالي فإن:

$$z = x + iy \Rightarrow$$

$$Z = \frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$$

تذكير: معادلة الكرة بالجانب العام:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

حيث المركز (x_0, y_0, z_0)

⇐ معادلة كرة ريمان:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

حيث

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$$

نصف القطر $R = 1$

من التناسب * تكتب على الشكل:

$$\frac{x}{x} = \frac{y}{y} = \frac{z-1}{-1} = t$$

حيث $t \in R^*$

ومن هذا التناسب نجد أن:

$$x = xt \qquad y = yt$$

$$z - 1 = -t \Rightarrow z = 1 - t$$

بالتعويض في معادلة الكرة نجد أن:

$$x^2 t^2 + y^2 t^2 + (1-t)^2 = 1$$

$$\Rightarrow t(x^2+y^2+1)+1-2t-1$$

$$\Rightarrow t^2(x^2+y^2+1)-2t=0$$

معادلة من الدرجة الثانية بـ t ، $t\neq 0$ لذلك نقسم على t

$$t(x^2+y^2+1)=2$$

$$\Rightarrow t=\frac{2}{x^2+y^2+1}$$

ومنه نجد أن:

$$u=\frac{2x}{x^2+y^2+1}$$

لكن نعلم أن:

$$Z=x+iy$$

$$\bar{Z}=x-iy \Rightarrow Z+\bar{Z}=2x$$

وأيضاً:

$$|Z|=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |Z|^2=x^2+y^2$$

$$\Rightarrow u=\frac{2x}{x^2+y^2+1}=\frac{Z+\bar{Z}}{|Z|^2+1} \quad ---(1)$$

وكذلك:

$$v=\frac{2y}{x^2+y^2+1}=i\,\frac{\bar{Z}-Z}{|Z|^2+1} \quad ---(2)$$

وكذلك الأمر:

$$\zeta_3 = 1 - \frac{2}{|z|^2+1} = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \quad \text{③}$$

مثال:

ليكن لدينا العدد العقدي:

$z = 1 - 3i$

المطلوب إيجاد النقطة المناظرة على سطح كرة ريمان

الحل:

أولاً يجب تحديد مكان النقطة هل هي خارج أو داخل أو على السطح لكرة ريمان

للتوضيح

ليكن لدينا $z = x + iy$ فإذا كان:

- تقع خارج السطح: $|z| > 1$
- تقع على السطح: $|z| = 1$
- تقع داخل السطح: $|z| < 1$

بما أن $|z| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} > 1$

فهي تقع خارج السطح

وبالتعويض في العلاقات ① و ② و ③ نوجد النقطة المناظرة

اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات

$$\Rightarrow \xi = \frac{-2}{10+1} = \frac{-2}{11}$$

$$\eta = \frac{6}{10+1} = \frac{6}{11}$$

$$\zeta = \frac{10-1}{10+1} = \frac{9}{11}$$

⇐ النقطة المناظرة هي $\left(\frac{-2}{11}, \frac{6}{11}, \frac{9}{11}\right)$

مثال 2- ليكن العدد العقدي:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

اوجد النقطة المناظرة للعدد العقدي على سطح كرة ريمان

الحل:

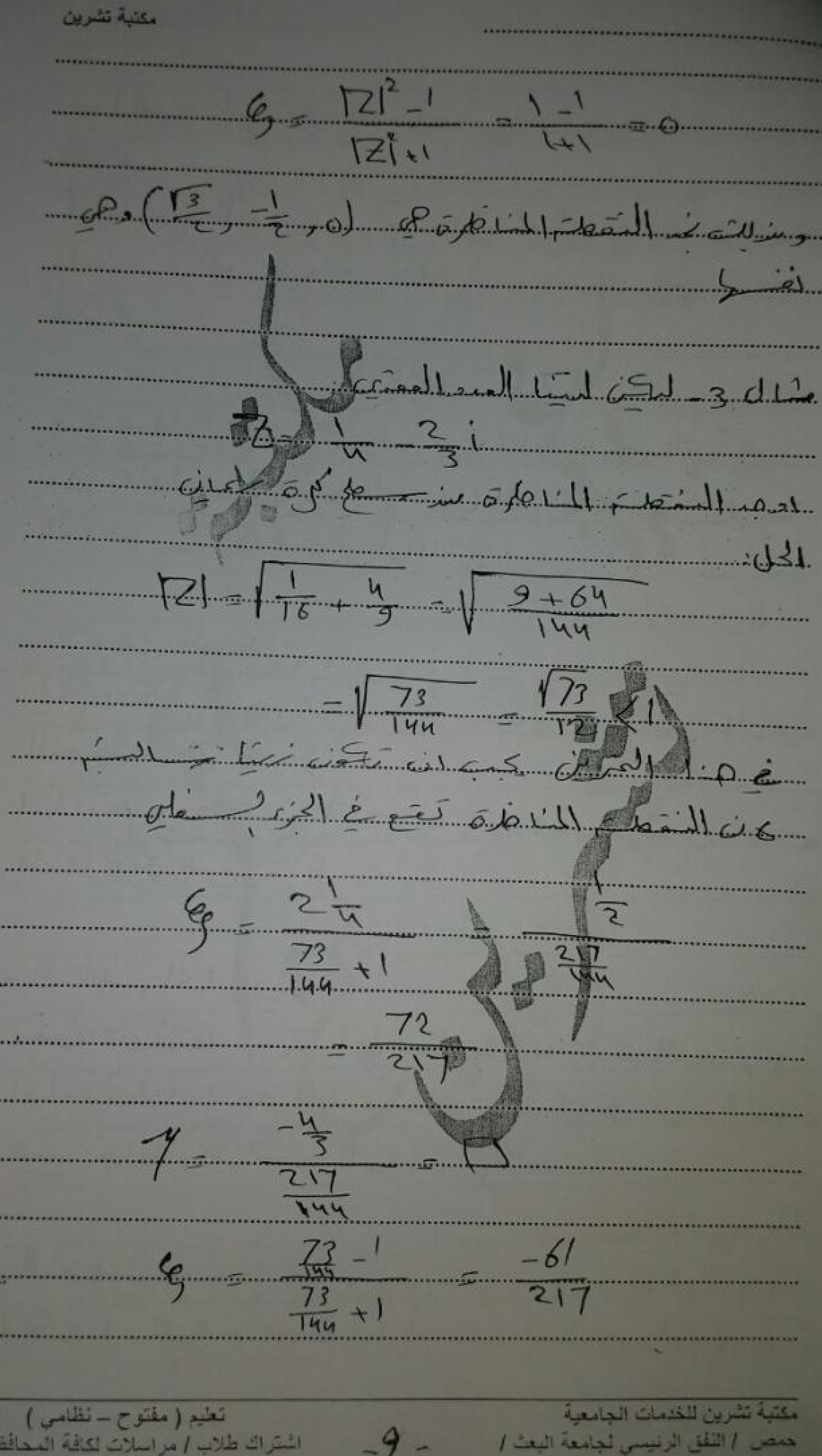
من التوضيح السابق نجد أن:

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

فهي تقع على دائرة سطح كرة ريمان فتكون نظيرتها نفسها لنرى ذلك:

$$\xi = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\eta = \frac{2(-\frac{1}{2})}{1+1} = -\frac{1}{2}$$



$$\zeta = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

وبالتالي فإن النقطة المناظرة هي $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ وهي نفسها

مثال 3 - ليكن لدينا العدد العقدي

$$z = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}i$$

اوجد النقطة المناظرة من سطح كرة ريمان

الحل:

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9+64}{144}}$$

$$= \sqrt{\frac{73}{144}} = \frac{\sqrt{73}}{12} < 1$$

في هذا التمرين يجب أن تكون زيتا سالبة لأن النقطة المناظرة تقع في الجزء السفلي

$$\xi = \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{\frac{73}{144}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{217}{144}}$$

$$= \frac{72}{217}$$

$$\eta = \frac{-\frac{4}{3}}{\frac{217}{144}} = \square$$

$$\zeta = \frac{\frac{73}{144}-1}{\frac{73}{144}+1} = \frac{-61}{217}$$

مفاهيم هندسية في المستوي العقدي:

- الجوار:

لتكن لدينا النقطة z_0 من المستوي العقدي جوار هذه النقطة هي مجموعة نقاط المستوي العقدي التي تحقق المتراجحة

$|z - z_0| < \varepsilon$

وهذه المتراجحة تمثل مجموعة نقاط المستوي التي تقع في داخلية (دليس على محيط) الدائرة التي مركزها النقطة z_0 ونصف قطرها ε

- النقطة الداخلية:

لتكن E مجموعة من نقاط المستوي العقدي C نقول عن النقطة z_0 من E

انها نقطة داخلية إذا وفقط إذا وجد جوار واحد على الأقل جميع نقاطه من E

- النقطة الخارجية:

نقول عن نقطة z_0 انها نقطة خارجية للمجموعة E إذا وفقط إذا وجد جوار واحد على الأقل لهذه النقطة جميع نقاطه لا تنتمي للمجموعة E

- النقطة الحدودية:

لتكن E مجموعة من نقاط المستوي العقدي ولتكن z_0

نقطة من هذه المجموعة نقول عن هذه النقطة انها داخلية اذا وفقط اذا كانت كل جوار لهذه النقطة يحتوي على نقاط من المجموعة A ونقاط لا تنتمي للمجموعة A

- المجموعة المغلقة :

نقول عن مجموعة ما مجموعة مغلقة اذا وفقط اذا احتوت هذه المجموعة على جميع نقاطها الحدية

- المجموعة المفتوحة :

نقول عن المجموعة A انها مجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا كانت كل نقطة من نقاطها هي نقطة داخلية

• هناك مجموعات غير مفتوحة وغير مغلقة في آن واحد مثال :

$1 < |z| \le 2$

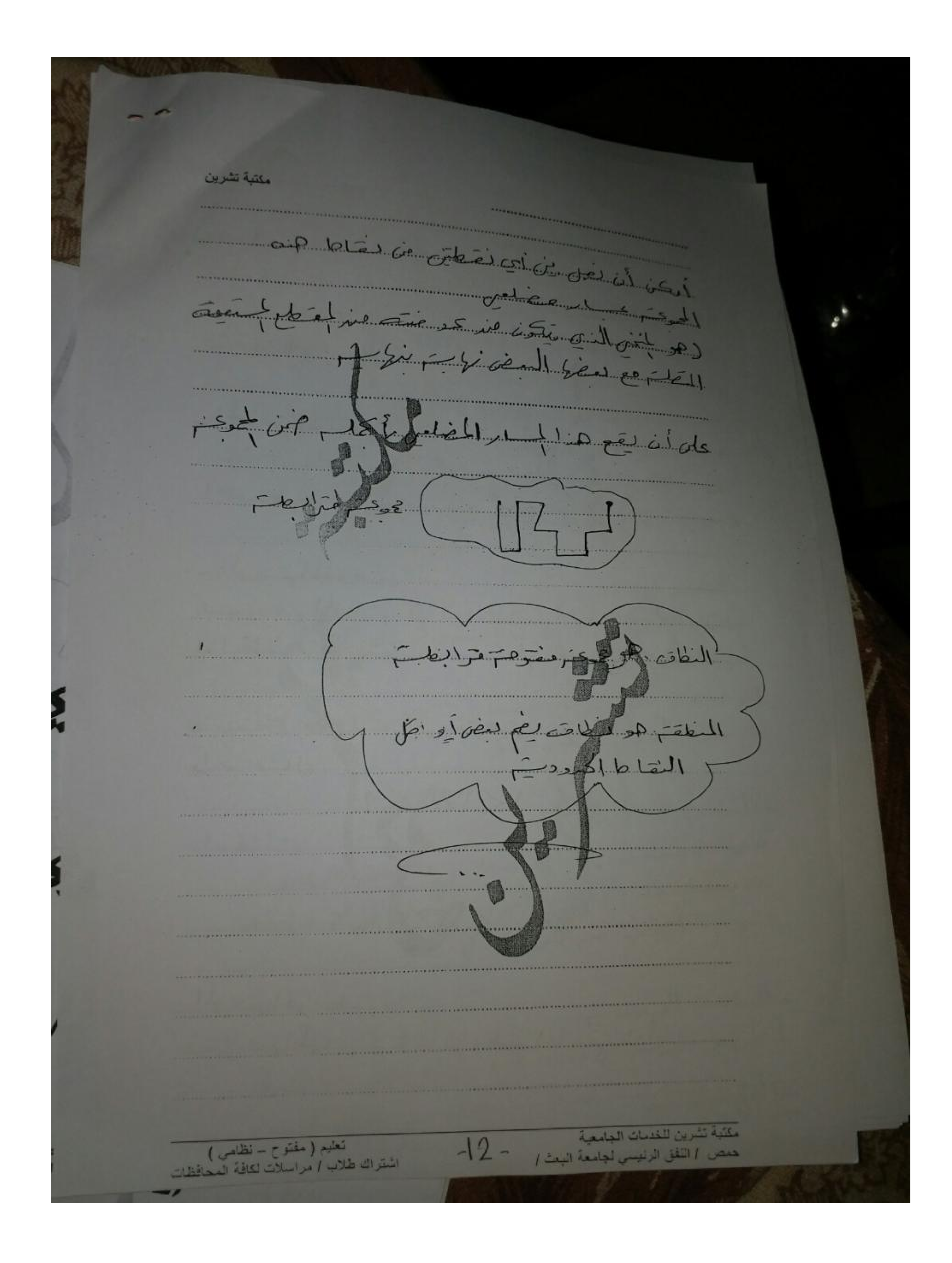
لو كانت

$1 < |z| \le 2$ فهي تكون مغلقة

- المجموعة المترابطة :

نقول عن المجموعة A انها مترابطة اذا وفقط اذا

صورة


مكتبة تشرين
أمكن أن نصل بين أي نقطتين من نقاطها منه
المجموعة بمسار مضلعي
وهو الخط الذي يتكون من عدد منته من القطع المستقيمة
المتصلة مع بعضها البعض نهاية ببداية
على أن يقع هذا المسار المضلعي بأكمله ضمن المجموعة
مجموعة مترابطة
النطاق: هو مجموعة مفتوحة مترابطة
المنطقة: هو النطاق يضم بعض أو كل النقاط الحدودية
مكتبة تشرين للخدمات الجامعية
حمص / النفق الرئيسي لجامعة البعث /
-12-
تعليم (مفتوح – نظامي)
اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات